

Sektion Grundlagen des Maschinenwesens  
 Direktor: Professor Dr. Ing. habil. Hans Göldner  
 DK 621.83:531.42  
 Eingang: 23. 7. 1971

# Trägheitskraftausgleich für ebene Koppelgetriebe<sup>1</sup>

Von Hans Dresig und Siegfried Schönfeld

*Die ständige Drehzahlerhöhung der Maschinen verstärkt u. a. die Schwingungen des Gestells.*

*Durch den Ausgleich der in ebenen Koppelgetrieben auftretenden Trägheitskräfte kann die Schwingungserregung auf das Gestell vermindert werden.*

*Es wird gezeigt, daß jedes ebene Koppelgetriebe hinsichtlich der Trägheitskräfte ausgeglichen werden kann. Die Herleitung der Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich läßt sich als ein Algorithmus formulieren, der dem Konstrukteur als Hilfsmittel bei der Dimensionierung von ebenen Koppelgetrieben dient.*

## 1. Einführung

Die Steigerung der Arbeitsproduktivität bedeutet u. a., die Arbeitsgeschwindigkeiten der Maschinen und Geräte ständig zu steigern. Dadurch treten auch die Probleme des dynamischen Ausgleichs von Koppelgetrieben immer mehr in den Vordergrund.

Während früher nur ein Sonderfall der Koppelgetriebe, das Schubkurbelgetriebe der Kraftmaschinen, untersucht wurde [2, 8], ist heute besonders der dynamische Ausgleich von vielgliedrigen Koppelgetrieben des Verarbeitungsmaschinenbaus aktuell.

Der dynamische Ausgleich von Koppelgetrieben kann in den Kraft- und Momentenausgleich und in den Leistungsausgleich eingeteilt werden. Beim Kraft- und Momentenausgleich, auch Massenausgleich genannt [10], minimiert man die schwingungserregenden Kraftwirkungen, die auf das Gestell übertragen werden.

Ein Leistungsausgleich wird durchgeführt, wenn ein möglichst gleichmäßiges Antriebsmoment und eine gleichmäßige Winkelgeschwindigkeit erzielt werden sollen. Die auf das Gestell übertragenen Kräfte und Momente bei Koppelgetrieben, verursacht durch die Trägheitswirkungen der einzelnen Glieder, können auf verschiedene Art und Weise (z. B. Ausgleichsmassen, Ausgleichsgetriebe, Ausgleichsfedern oder Schwingungstilger) verringert werden.

Hervorzuheben ist dabei die Möglichkeit, durch die zweckentsprechende Massenanzordnung die Ursachen der Schwingungserregung zu verringern [1, 3, 6, 7], da dadurch keine zusätzlichen Antriebs- und Lagerelemente erforderlich sind [7].

Eine umfangreiche Bibliografie des Kraft- und Momentenausgleiches bei Koppelgetrieben existiert in [7] und [11].

Jacobi und Rose [7] stellten die Zusammenhänge in einem „Flußbild zur Beseitigung (bzw. Verringerung) von Gestellschwingungen“ durch Ausgleichsverfahren dar.

In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß ein Trägheitskraftausgleich für ebene Koppelgetriebe mit beliebiger Gliederzahl und beliebiger Struktur möglich ist.

## 2. Trägheitskraftausgleich mit Ausgleichsmassen

### 2.1. Festlegung der Bezeichnungen

Am Beispiel des Bildes 1 soll die Bezeichnungsweise erläutert werden. Sie entspricht der Bezeichnungsweise, die für das Programmsystem Mechanismendynamik (MEDY) gültig ist. [5]

Der Ursprung des raumfesten Koordinatensystems wird in das Gelenk mit den niedrigsten Indizes gelegt. Die Koordinatenachsen bilden ein Rechtssystem. Die positive Richtung der  $x$ -Achse zeigt zum Gestellpunkt mit den nächsthöheren Indizes. Die Richtung von positiver  $y$ -Achse und positiver  $z$ -Achse folgt aus dem Rechtssystem.

Die Getriebeglieder werden mit den Indizes 1 bis  $n$  numeriert, wobei das Gestell stets den Index 1 trägt. Die Gelenkpunkte erhalten entsprechend den Gliederbezeichnungen Doppelindizes. Als Gliedlänge  $l_k$  wird diejenige Länge definiert, die durch die Gelenke begrenzt wird, deren Quersummen der Indizes am niedrigsten sind. Bei-

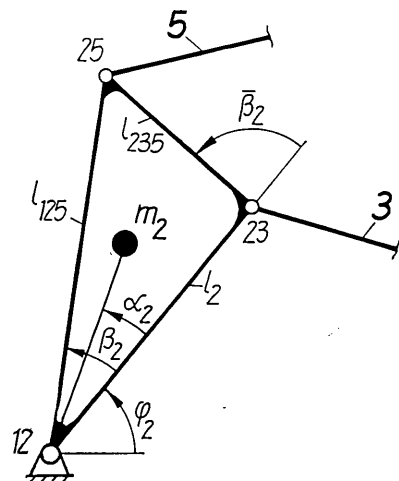


Bild 1 Bezeichnungsweise

<sup>1</sup> Herrn Professor (em.) Dr. Ing. habil. W. Lichtenheldt zum 70. Geburtstag gewidmet.

spielsweise wird in Bild 1 die Gliedlänge  $l_2 = l_{123}$  durch die Gelenke 12 und 23 begrenzt.

Alle anderen Längen, die sogenannten Hilfsängen; kennzeichnet man mit drei Indizes, z. B. ist  $l_{125}$  die Länge zwischen den Gelenken 12 und 25.

Die raumfesten Winkel  $\varphi_k$  sind als Winkel zwischen der raumfesten  $x$ -Achse und den entsprechenden Gliedlängen  $l_k$  im mathematisch positiven Sinn definiert.

Die Winkel  $\beta_k$  bzw.  $\bar{\beta}_k$  bezeichnen die körperfesten, d. h. auf das bewegliche Glied bezogene Winkel zwischen der Gliedachse und den Hilfsängen. In Bild 1 ist  $\beta_2$  der Winkel zwischen  $l_2$  und  $l_{125}$  und  $\bar{\beta}_2$  der Winkel zwischen  $l_2$  und  $l_{235}$ .

Der Abstand zwischen dem Gelenk mit den niedrigsten Indizes am Glied  $k$  und dem Gliedschwerpunkt  $S_k$  wird Schwerpunktstrecke  $s_k$  genannt. Die Winkel zwischen Gliedlänge  $l_k$  und der Schwerpunktstrecke  $s_k$  im mathematisch positiven Drehsinn wird als Schwerpunktswinkel  $\alpha_k$  definiert (Bild 1).

## 2.2. Allgemeine Betrachtungen

Für ein  $n$ -gliedriges Koppelgetriebe ergeben sich auf das Gestell folgende Trägheitswirkungen:

$$F_x = -\sum m_k \ddot{x}_{Sk} \quad (1)$$

$$F_y = -\sum m_k \ddot{y}_{Sk} \quad (2)$$

$$F_z = -\sum m_k \ddot{z}_{Sk} \quad (3)$$

$$M_x = -\sum \{m_k (y_{Sk} \ddot{z}_{Sk} - z_{Sk} \ddot{y}_{Sk})\} \quad (4)$$

$$M_y = -\sum \{m_k (z_{Sk} \ddot{x}_{Sk} - x_{Sk} \ddot{z}_{Sk})\} \quad (5)$$

$$M_z = -\sum \{m_k (x_{Sk} \ddot{y}_{Sk} - y_{Sk} \ddot{x}_{Sk}) + J_{Sk} \ddot{\varphi}_k\} \quad (6)$$

Dabei bedeuten:

$m_k$  Masse des Getriebegliedes  $k$  mit  $2 \leq k \leq n$

$J_{Sk}$  Massenträgheitsmoment des Getriebegliedes  $k$  um seinen Schwerpunkt

$x_{Sk}, y_{Sk}, z_{Sk}$  raumfeste Koordinaten des Schwerpunktes des Getriebegliedes  $k$ .

Statt  $\sum_{k=2}^n$  wird  $\sum$  geschrieben.

Die Gln. (1) bis (3) werden mit dem Schwerpunktsatz wie folgt formuliert:

$$F_x = -\sum m_k \ddot{x}_{Sk} = -m \ddot{x}_S \quad (7)$$

$$F_y = -\sum m_k \ddot{y}_{Sk} = -m \ddot{y}_S \quad (8)$$

$$F_z = -\sum m_k \ddot{z}_{Sk} = -m \ddot{z}_S \quad (9)$$

Dabei sind:

$m = \sum m_k$  Gesamtmasse aller Getriebeglieder

$x_S, y_S, z_S$  raumfeste Koordinaten des Gesamtschwerpunktes aller Getriebeglieder.

Bei einem vollständigen Trägheitskraftausgleich ist die Summe aller Trägheitskräfte Null  $F_x = F_y = F_z = 0$ . Diese Bedingung ist bekanntlich erfüllt, wenn sich die Lage des Gesamtschwerpunktes des Getriebes bei beliebigen Bewegungen nicht verändert.

Bei ebenen Koppelgetrieben, bei denen angenommen wird, daß die Schwerpunkte aller Glieder in einer Ebene liegen, d. h.  $z_S = \text{konst.}$ , verschwinden die Momente  $M_x$  und  $M_y$ , Gl. (4) und (5), in demselben Maße, wie die Trägheitskräfte  $F_x$  und  $F_y$  ausgeglichen werden. Das entstehende Moment  $M_z$  wird nachfolgend gemäß der Aufgabenstellung nicht weiter betrachtet. Eine Möglichkeit, dieses Moment  $M_z$  zu minimieren, wird in [7] erörtert.

Es erhebt sich nun die Frage:

Ist für ein beliebiges  $n$ -gliedriges ebenes Koppelgetriebe, das Dreh- und Schubgelenke enthält, eine solche Anordnung der Massen der Getriebeglieder möglich, daß der Gesamtschwerpunkt bei beliebigen Bewegungen in Ruhe bleibt?

Dazu werden die nachfolgenden Überlegungen angestellt. Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes ergeben sich aus:

$$m \cdot y_S = \sum \left\{ m_k \left( \sum_{p(k)} l_{p(k)} \sin \varphi_{p(k)}^* + s_k \sin (\varphi_k + \alpha_k) \right) \right\} \quad (10)$$

$$m \cdot x_S = \sum \left\{ m_k \left( \sum_{p(k)} l_{p(k)} \cos \varphi_{p(k)}^* + s_k \cos (\varphi_k + \alpha_k) \right) \right\} \quad (11)$$

$$m \cdot z_S = \sum m_k z_{Sk} \quad (12)$$

Darin sind  $l_{p(k)}$  und  $\varphi_{p(k)}^*$  Kurzbezeichnungen für die Längen und Winkel derjenigen Glieder, die sich zwischen dem Koordinatenursprung und dem Glied  $k$  befinden.

Die Winkel  $\varphi_{p(k)}^*$  und  $\varphi_k$  sind im allgemeinen von einem Antriebswinkel abhängige Größen.

Mit den Gln. (10) und (11) können somit die Koordinaten der Bahn des Gesamtschwerpunktes in der  $x$ - $y$ -Ebene berechnet werden.

In Richtung der  $z$ -Achse bleibt der Gesamtschwerpunkt bei einem ebenen Getriebe in Ruhe, da alle  $z_{Sk}$  konstant sind. Bei einem  $n$ -gliedrigen ebenen zwangsläufigen Getriebe ist die Lage der Getriebeglieder durch  $(n-1)$  veränderliche Winkel bestimmt. Stellt ein Winkel davon eine Antriebskoordinate dar, so lassen sich die anderen  $(n-2)$  Winkel daraus ermitteln, und zwar grafisch oder analytisch aus den Zwangsbedingungen.

Zwischen den Winkeln bestehen damit  $(n-2)$  Zwangsbedingungen. Da mit Gl. (10) und (11) zwei Bedingungen für  $x_S = \text{konstant}$  und  $y_S = \text{konstant}$  existieren, beträgt die Gesamtzahl der zu erfüllenden Gleichungen damit  $n$ . Wird vorausgesetzt, daß die Gliedlängen beim Ausgleich nicht verändert werden sollen, so können an jedem Getriebeglied drei Parameter, nämlich

die Masse  $m_k$ ,

der Schwerpunktabstand  $s_k$ ,

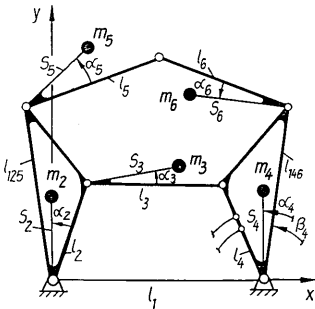
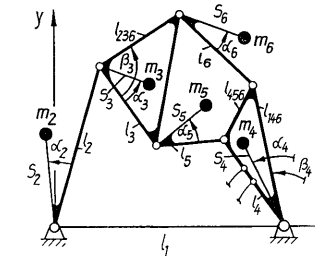
und der Schwerpunktswinkel  $\alpha_k$

variiert werden.<sup>2</sup>

Die Zahl der Variablen beträgt also  $3(n-1)$ . An diese  $3(n-1)$  Variablen werden  $n$  Bedingungen gestellt. Von  $3n-3$  Parametern sind demnach  $n$  Gleichungen zu erfüllen. Da die Anzahl der Gleichungen geringer ist als die der Unbekannten, können im allgemeinen  $(3n-3) - n = 2n-3$  Variable frei gewählt werden.

<sup>2</sup> Natürlich kann der Konstrukteur auch die Gliedlängen  $l_k$  ändern, sofern das die konkrete Aufgabe zuläßt. Dadurch erhöht sich die Zahl der Variablen auf  $4(n-1)$  und somit auch die Zahl der Möglichkeiten, das Getriebe durch Veränderung verschiedener Parameter  $l_k, m_k, s_k, \alpha_k$  auszugleichen.

Kinematisches Schema	Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich bei sechsgliedrigen Koppelgetrieben
	Lage des Gesamtschwerpunktes
<p>1.</p>	$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 \left( 1 - \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 \right) = 0$ $m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 - m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_1 + m_5 \frac{l_{145}}{l_4} \left( \cos \beta_1 - \frac{s_5}{l_5} \cos (\alpha_5 + \beta_1) \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_1 + m_5 \frac{l_{145}}{l_4} \left( \sin \beta_1 - \frac{s_5}{l_5} \sin (\alpha_5 + \beta_1) \right) = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 = 0$ <hr/> $m \cdot x_S = m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 l_1 + m_5 \left( l_1 + \frac{s_5}{l_5} l_{116} \cos (\alpha_5 + \tau_2) \right) + m_6 (l_1 + l_{116} \cos \tau_2)$ $m \cdot y_S = m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_5 \frac{s_5}{l_5} l_{116} \sin (\alpha_5 + \tau_2) + m_6 l_{116} \sin \tau_2$
<p>2.</p>	$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \left( \frac{l_{125}}{l_2} \cos \beta_2 - \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{235}}{l_2} \cos (\alpha_5 + \bar{\beta}_2) \right) + m_6 l_2 = 0$ $m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \left( \frac{l_{125}}{l_2} \sin \beta_2 - \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{235}}{l_2} \sin (\alpha_5 + \bar{\beta}_2) \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{236}}{l_3} \cos (\alpha_5 + \beta_3) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{236}}{l_3} \sin (\alpha_5 + \beta_3) = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 = 0$ <hr/> $m \cdot x_S = m_4 l_1 \left( 1 - \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 \right)$ $m \cdot y_S = -m_4 \frac{s_4}{l_4} l_1 \sin \alpha_4$

Kinematisches Schema	Bedingungen für den vollständigen Trägheitsausgleich bei sechsgliedrigen Koppelgetrieben
	Lage des Gesamtschwerpunktes
<p>3.</p> 	$m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 + m_5 \frac{l_{125}}{l_2} \sin \beta_2 - \left( m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{125}}{l_2} \sin (\alpha_5 + \beta_2) \right) = 0$ $m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 \left( 1 - \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 \right) + m_5 \frac{l_{125}}{l_2} \left( \cos \beta_2 - \frac{s_5}{l_5} \cos (\alpha_5 + \beta_2) \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin (\alpha_4 - \beta_4) + m_5 \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{146}}{l_4} \sin (\alpha_5 + \beta_4) + m_6 \frac{l_{146}}{l_4} \sin \beta_4 = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos (\alpha_4 - \beta_4) + m_5 \frac{s_5}{l_5} \frac{l_{146}}{l_4} \cos (\alpha_5 + \beta_4) + m_6 \frac{l_{146}}{l_4} \cos \beta_4 = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 = 0$ $m \cdot x_S = m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6$ $m \cdot y_S = m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5$
<p>4.</p> 	$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 \right) + m_6 \left( 1 - \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 \right) = 0$ $m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 - \left( m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 \right) + m_6 \frac{l_{236}}{l_3} \left( \cos \beta_3 - \frac{s_6}{l_6} \cos (\alpha_6 + \beta_3) \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_6 \frac{l_{236}}{l_3} \sin \beta_3 - \left( m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{l_{236}}{l_3} \frac{s_6}{l_6} \sin (\alpha_6 + \beta_3) \right) = 0$ $m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{l_{146}}{l_4} \frac{s_6}{l_6} \cos (\alpha_6 + \beta_4) = 0$ $m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{l_{146}}{l_4} \frac{s_6}{l_6} \sin (\alpha_6 + \beta_4) = 0$

Kinematisches Schema	Bedingungen für den vollständigen Trägheitsausgleich bei sechsgliedrigen Koppelgetrieben
	Lage des Gesamtschwerpunktes
	$m \cdot x_S = l_1 \left( m_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 \right)$ $m \cdot y_S = l_1 \left( m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 \right)$
<p>5.</p>	$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 \right) = 0$ $m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 - m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \frac{l_{235}}{l_3} \left( \cos \beta_3 - \frac{s_5}{l_5} \cos (\alpha_5 + \beta_3) \right) = 0$ $m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \frac{l_{235}}{l_3} \left( \sin \beta_3 - \frac{s_5}{l_5} \sin (\alpha_5 + \beta_3) \right) = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 = 0$ $m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 = 0$ <hr/> $m \cdot x_S = m_4 \left( 1 - \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 \right) + m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 \left( 1 + \frac{l_{146}}{l_1} \cos (\alpha_5 + \tau_2) \right) + m_6 \left( 1 + \frac{l_{146}}{l_1} \cos \tau_2 \right)$ $m \cdot y_S = -m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 \left( 1 + \frac{l_{146}}{l_1} \sin (\alpha_5 + \tau_2) \right) + m_6 \frac{l_{146}}{l_1} \sin \tau_2$

Es kann nun folgende Schlußfolgerung formuliert werden:

Jedes Koppelgetriebe läßt sich durch eine geeignete Masseverteilung so ausgleichen, daß die Summe aller Trägheitskräfte bei beliebigen Bewegungen Null ist. Der Gesamtschwerpunkt bleibt dabei in Ruhe. Je mehr Glieder ein Koppelgetriebe besitzt, desto mehr Möglichkeiten bestehen bei der Wahl der Parameter.

Damit ist die gestellte Frage positiv beantwortet. Die Anordnung der Massen der Glieder im konkreten Fall und die Bedingungen, welche die Massen und die geometrischen Abmessungen beim vollständigen Trägheitskraftausgleich erfüllen müssen, werden im folgenden Abschnitt untersucht.

### 2.3. Trägheitskraftausgleich bei sechsgliedrigen Koppelgetrieben

Aus den beiden sechsgliedrigen ebenen kinematischen Ketten können fünf verschiedene Koppelgetriebe abgeleitet werden.

An einem Beispiel sollen die Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich hergeleitet werden. Dazu wird das Getriebe 4, Tafel 1, benutzt. Auf die Darstellung der Winkel  $\varphi_k$  wurde in Tafel 1 verzichtet, da deren systematische Bezeichnungsweise erläutert wurde.

Die statischen Momente nach Gln. (10) und (11) werden in komplexer Schreibweise formuliert:

$$\begin{aligned}
 m(x_S + iy_S) &= \sum_{k=2}^6 m_k(x_{Sk} + iy_{Sk}) \\
 &= m_2 s_2 e^{i(\alpha_2 + \tau_2)} \\
 &\quad + m_3 (l_2 e^{i\varphi_2} + s_3 e^{i(\alpha_3 + \tau_3)}) \\
 &\quad + m_4 (l_1 e^{i0} + s_4 e^{i(\alpha_4 + \tau_4)}) \\
 &\quad + m_5 (l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3} + s_5 e^{i(\alpha_5 + \tau_5)}) \\
 &\quad + m_6 (l_2 e^{i\varphi_2} + l_{236} e^{i(\beta_3 + \tau_3)} + s_6 e^{i(\alpha_6 + \tau_6)}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Mit den Zwangsbedingungen können noch einige Winkel  $\varphi_k$  aus Gl. (13) eliminiert werden.

In komplexer Darstellung lauten diese Zwangsbedingungen wie folgt:

$$l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3} + l_5 e^{i\varphi_5} = l_1 e^{i0} + l_4 e^{i\varphi_4} \quad (14)$$

$$l_2 e^{i\varphi_2} + l_{236} e^{i(\beta_3+\varphi_3)} + l_6 e^{i\varphi_6} = l_1 e^{i0} + l_{146} e^{i(\beta_4+\varphi_4)}. \quad (15)$$

Mit den Gln. (14) und (15) eliminiert man nun aus Gl. (13) die Winkel  $\varphi_5$  und  $\varphi_6$ .

Gl. (14) wird nach  $e^{i\varphi_5}$  und Gl. (15) nach  $e^{i\varphi_6}$  aufgelöst und in Gl. (13) eingesetzt.

Nach einigen elementaren Umformungen folgt

$$\begin{aligned} m(x_S + iy_S) = & \left[ m_2 s_2 e^{i\alpha_2} + m_3 l_2 + m_5 l_2 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} \right) \right. \\ & \left. + m_6 l_2 \left( 1 - \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6} \right) \right] e^{i\varphi_2} \\ & + \left[ m_3 s_3 e^{i\alpha_3} + m_5 l_3 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} \right) \right. \\ & \left. + m_6 l_{236} e^{i\beta_3} \left( 1 - \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6} \right) \right] e^{i\varphi_3} \\ & + \left[ m_4 s_4 e^{i\alpha_4} + m_5 l_4 \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} \right. \\ & \left. + m_6 l_{146} e^{i\beta_4} \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6} \right] e^{i\varphi_4} \\ & + l_1 e^{i0} m_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} + m_6 \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Winkel  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  sind veränderliche Winkel. Da nach dem Ausgleich der Gesamtschwerpunkt  $m \cdot (x_S + iy_S)$  während der Bewegung des Getriebes in Ruhe sein muß, d. h., es darf keine Abhängigkeit von der Getriebestellung vorhanden sein, werden die Koeffizienten der Terme  $e^{i\varphi_2}$ ,  $e^{i\varphi_3}$ ,  $e^{i\varphi_4}$  Null gesetzt.

Folgende Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich ergeben sich:

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} e^{i\alpha_2} + m_3 + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} \right) + m_6 \left( 1 - \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} m_3 \frac{s_3}{l_3} e^{i\alpha_3} + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} \right) \\ + m_6 \frac{l_{236}}{l_3} \left( e^{i\beta_3} - \frac{s_6}{l_6} e^{i(\alpha_6+\beta_3)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$m_4 \frac{s_4}{l_4} e^{i\alpha_4} + m_5 \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} + m_6 \frac{l_{146}}{l_4} \cdot \frac{s_6}{l_6} e^{i(\alpha_6+\beta_4)} = 0. \quad (19)$$

Die Lage des Gesamtschwerpunktes wird bestimmt durch

$$m(x_S + iy_S) = l_1 \left( m_4 + m_5 \frac{s_5}{l_5} e^{i\alpha_5} + m_6 \frac{s_6}{l_6} e^{i\alpha_6} \right). \quad (20)$$

Nach Trennung von Realteil und Imaginärteil mit der Eulergleichung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (21)$$

ergeben sich die sechs Bedingungen, die in Tafel 1 für Getriebe 4 aufgeführt sind.

Tafel 1 zeigt ebenfalls die anderen vier sechsgliedrigen Koppelgetriebe mit den entsprechenden Ausgleichsbedingungen.

#### 2.4. Trägheitskraftausgleich bei Koppelgetrieben mit Schubgliedern

Als Beispiel von ebenen Koppelgetrieben mit Schubgliedern sollen die exzentrische Kurbelschleife und die exzentrische Schubkurbel betrachtet werden.

Exzentrische Kurbelschleife (Bild 2)

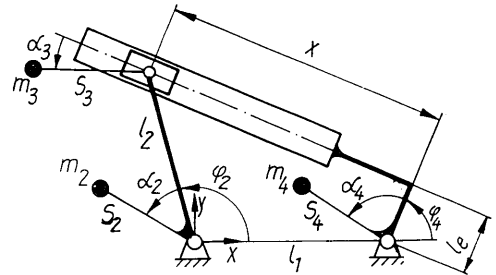


Bild 2 exzentrische Kurbelschleife

Die statischen Momente in komplexer Form liefern

$$\begin{aligned} m(x_S + iy_S) = & m_2 s_2 e^{i(\alpha_2+\varphi_2)} + m_3 \left[ l_2 e^{i\varphi_2} \right. \\ & \left. + s_3 e^{i(\alpha_3+\varphi_4+\frac{\pi}{2})} \right] + m_4 [l_1 e^{i0} + s_4 e^{i(\alpha_4+\varphi_4)}]. \end{aligned} \quad (22)$$

Mit der Zwangsbedingung

$$l_2 e^{i\varphi_2} = l_1 e^{i0} + l_e e^{i\varphi_4} + X e^{i(\varphi_4+\frac{\pi}{2})}$$

kann aus Gl. (22) weder der Winkel  $\varphi_2$  noch der Winkel  $\varphi_4$  eliminiert werden, da als neue zusätzliche Veränderliche der Schubweg  $X$  eingeführt würde.

Ein Koeffizientenvergleich für  $e^{i\varphi_4}$  und  $e^{i\varphi_2}$  in Gl. (22) liefert nach Einführung der Komponentenschreibweise folgende Bedingungen für den Trägheitskraftausgleich:

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 = 0 \quad (23)$$

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 = 0$$

$$m_3 s_3 \sin(\alpha_3 + 90^\circ) + m_4 s_4 \sin \alpha_4 = 0 \quad (24)$$

$$m_3 s_3 \cos(\alpha_3 + 90^\circ) + m_4 s_4 \cos \alpha_4 = 0.$$

Der Gesamtschwerpunkt liegt auf der  $x$ -Achse, weil

$$m \cdot x_S = m_4 l_1$$

$$m \cdot y_S = 0. \quad (25)$$

Exzentrische Schubkurbel (Bild 3)

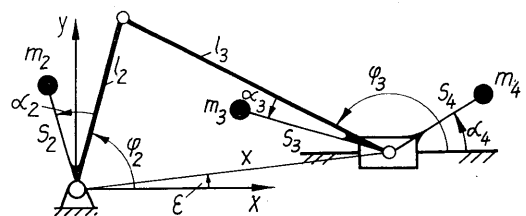


Bild 3 Exzentrische Schubkurbel

Die statischen Momente in komplexer Form liefern:

$$m(x_S + iy_S) = m_2 s_2 e^{i(\alpha_2 + \varphi_2)} + m_3 (X e^{i\epsilon} + s_3 e^{i(\alpha_3 + \varphi_3)}) + m_4 (X e^{i\epsilon} + s_4 e^{i\alpha_4}). \quad (26)$$

Mit der Zwangsbedingung

$$X e^{i\epsilon} = l_2 e^{i\varphi_2} - l_3 e^{i\varphi_3} \quad (27)$$

wird aus Gl. (26) der Term  $X e^{i\epsilon}$  eliminiert.

Ein nachfolgender Koeffizientenvergleich für  $e^{i\varphi_2}$  und  $e^{i\varphi_3}$  liefert nach Einführung der Komponentenschreibweise folgende Bedingungen für den Trägheitskraftausgleich:

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 = 0 \quad (28)$$

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 + m_4 = 0$$

$$m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 = 0 \quad (29)$$

$$m_3 \left( \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 - 1 \right) - m_4 = 0.$$

Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes betragen:

$$m \cdot x_S = m_4 s_4 \cos \alpha_4 \quad (30)$$

$$m \cdot y_S = m_4 s_4 \sin \alpha_4.$$

## 2.5. Allgemeine Methode

Es kann nicht der Zweck dieser Veröffentlichung sein, für viele ebene Koppelgetriebe die Ausgleichsbedingungen für die Trägheitskräfte anzugeben.

Es zeigt sich aber, daß bei der Herleitung dieser Bedingungen immer ganz bestimmte Operationen auszuführen sind. Diese Operationen können zu einem Algorithmus zusammengefaßt werden.

Der Konstrukteur kann mit diesem Algorithmus ohne große Mühe für jedes beliebige ebene Koppelgetriebe die Bedingungen für einen vollständigen Trägheitskraftausgleich herleiten.

Das zu untersuchende Getriebe kann danach den entsprechenden Forderungen durch Anbringen von Ausgleichsmassen, Masseumverteilung der Glieder u. a. angepaßt werden.

Der Algorithmus (Bild 4) soll nun zur Erläuterung auf ein 8gliedriges Getriebe ( $n = 8$ ) angewendet werden.

Schritt 1: Festlegung der Bezeichnungen des Getriebes.

Bild 5 zeigt das zu untersuchende Getriebe mit den entsprechenden Bezeichnungen, wie sie im Abschn. 2.1. vorgeschlagen wurden.

Schritt 2: Formulierung der statischen Momente.

$$\begin{aligned} m(x_S + iy_S) = & m_2 s_2 e^{i(\alpha_2 + \varphi_2)} + m_3 (l_2 e^{i\varphi_2} + s_3 e^{i(\alpha_3 + \varphi_3)}) \\ & + m_4 (l_1 e^{i0} + l_{146} e^{i\tau_2} + s_4 e^{i(\alpha_4 + \varphi_4)}) \\ & + m_5 (l_2 e^{i\varphi_2} + l_{235} e^{i(\beta_3 + \varphi_3)} + s_5 e^{i(\alpha_5 + \varphi_5)}) \\ & + m_6 (l_1 e^{i0} + s_6 e^{i(\alpha_6 + \varphi_6)}) + m_7 (l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3} \\ & - l_{347} e^{i(\beta_4 + \varphi_4)} + s_7 e^{i(\alpha_7 + \varphi_7)}) \\ & + m_8 (l_{128} e^{i(\beta_2 + \varphi_2)} + s_8 e^{i(\alpha_8 + \varphi_8)}) \end{aligned}$$

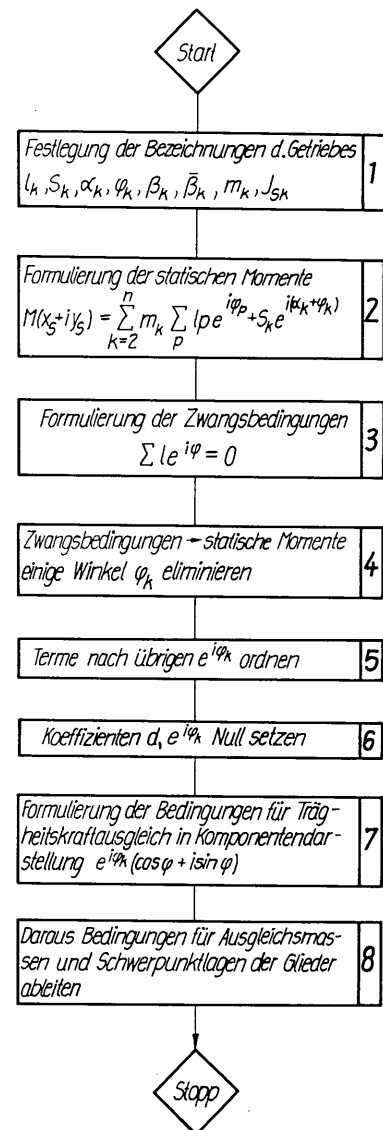


Bild 4 Algorithmus „Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich bei beliebigen ebenen Koppelgetrieben“

Schritt 3: Formulierung der Zwangsbedingungen

Für ein  $n$ -gliedriges Koppelgetriebe können  $(n - 2)$  Zwangsbedingungen bzw.  $\left(\frac{n - 2}{2}\right)$  Zwangsbedingungen in komplexer Schreibweise aufgestellt werden (siehe [12]). Bei einem 8gliedrigen Koppelgetriebe sind das also 3 komplexe Zwangsbedingungen.

Masche 123 561:

$$l_2 e^{i\varphi_2} + l_{235} e^{i(\beta_3 + \varphi_3)} + l_5 e^{i\varphi_5} = l_1 e^{i0} + l_6 e^{i\varphi_6} \quad (32)$$

Masche 123 461:

$$l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3} = l_1 e^{i0} + l_{146} e^{i\tau_2} + l_4 e^{i\varphi_4} \quad (33)$$

Masche 1 287 461:

$$l_{128} e^{i(\beta_2 + \varphi_2)} + l_8 e^{i\varphi_8} = l_1 e^{i0} + l_{146} e^{i\tau_2} + l_{147} e^{i(\beta_4 + \varphi_4)} + l_7 e^{i\varphi_7} \quad (34)$$

Schritt 4: Zwangsbedingungen zur Eliminierung von Winkeln  $\varphi_k$  in die Gleichung der statischen Momente einsetzen

Die Gln. (32), (33) und (34) werden benutzt, um aus der Gleichung der statischen Momente, Gl. (31), die Terme  $e^{i\varphi_2}$ ,  $e^{i\varphi_3}$  und  $e^{i\varphi_5}$  zu entfernen.

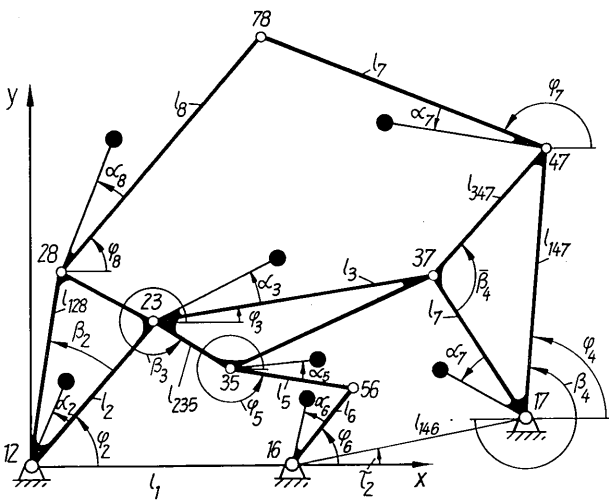


Bild 5 8gliedriges ebenes Koppelgetriebe

Schritt 5: Terme der Gl. (31) nach den restlichen  $e^{i\varphi_k}$  ordnen

Die übrigen Summanden ordnet man um nach  $e^{i\varphi_2}$ ,  $e^{i\varphi_3}$ ,  $e^{i\varphi_6}$ ,  $e^{i\varphi_7}$ .

Schritt 6: Koeffizienten der  $e^{i\varphi_k}$  Null setzen

Die Koeffizienten der in Schritt 5 aufgeführten  $e^{i\varphi_k}$  werden Null gesetzt. Es ergeben sich  $\frac{n}{2} = 4$  komplexe Gleichungen.

Schritt 7: Komponentenschreibweise durch Koeffizientenvergleich einführen

Die Formulierung der Ausgleichsbedingungen in Komponentenschreibweise liefern die 8 Gleichungen Gl. (35) bis (42), die die Ausgleichsbedingungen darstellen.

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \cos \alpha_2 + m_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \left( 1 - \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 \right) + m_7 \left[ \frac{l_3}{l_2} + \left( 1 - \frac{l_{317}}{l_4} \cos \bar{\beta}_4 \right) \right] + m_8 \left[ \frac{l_{128}}{l_2} \cos \beta_2 - \frac{l_{128}}{l_2} \frac{s_8}{l_8} \cos (\alpha_8 + \beta_2) + \frac{l_{147}}{l_4} \frac{s_8}{l_8} \cdot \cos (\alpha_8 + \beta_4) \right] = 0. \quad (35)$$

$$m_2 \frac{s_2}{l_2} \sin \alpha_2 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_8 \frac{l_{128}}{l_2} \sin \beta_2 + m_8 \frac{l_{147}}{l_4} \frac{s_8}{l_8} \sin (\alpha_8 + \beta_4) - \left[ m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_7 \frac{l_{347}}{l_4} \sin \bar{\beta}_4 + m_8 \frac{l_{128}}{l_2} \frac{s_8}{l_8} \sin (\alpha_8 + \beta_2) \right] = 0 \quad (36)$$

$$m_3 \frac{s_3}{l_3} \cos \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 + m_5 \frac{l_{235}}{l_3} \left[ \cos \beta_3 - \frac{s_5}{l_5} \cos (\alpha_5 + \beta_3) \right] - m_7 \frac{l_{347}}{l_4} \cos \bar{\beta}_4 + m_8 \frac{l_{147}}{l_4} \frac{s_8}{l_8} \cos (\alpha_8 + \beta_4) = 0 \quad (37)$$

$$m_3 \frac{s_3}{l_3} \sin \alpha_3 + m_4 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_5 \frac{l_{235}}{l_3} \left[ \sin \beta_3 - \frac{s_5}{l_5} \sin (\alpha_5 + \beta_3) \right] - m_7 \frac{l_{347}}{l_4} \sin \bar{\beta}_4 + m_8 \frac{l_{147}}{l_4} \frac{s_8}{l_8} \sin (\alpha_8 + \beta_4) = 0 \quad (38)$$

$$m_5 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \cos \alpha_6 = 0 \quad (39)$$

$$m_5 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_6 \frac{s_6}{l_6} \sin \alpha_6 = 0 \quad (40)$$

$$m_7 \frac{s_7}{l_7} \cos \alpha_7 + m_8 \frac{s_8}{l_8} \cos \alpha_8 = 0 \quad (41)$$

$$m_7 \frac{s_7}{l_7} \sin \alpha_7 + m_8 \frac{s_8}{l_8} \sin \alpha_8 = 0 \quad (42)$$

Schritt 8: Bedingungen für Ausgleichsmassen und Schwerpunktlagen der Glieder ableiten

Von den insgesamt  $3(n-1) = 21$  Parametern müssen  $m_2 \dots m_8$ ,  $s_2 \dots s_8$ ,  $\alpha_2 \dots \alpha_8$  so variiert werden, daß sie die 8 Bedingungen einhalten. Man kann sich nun von diesen 21 Größen diejenigen 8 aussuchen, die an bestimmte Forderungen, z. B. Platzbedarf, Masse, technologische Einschränkungen, gebunden sind. Sie sind den entsprechenden Nebenbedingungen anzupassen. Die übrigen 13 Parameter sind dann frei wählbar.

Die Koordinaten des Gesamtschwerpunktes ergeben sich aus den Gln. (43) und (44).

$$m \cdot x_S = m_4 l_1 \left( 1 - \frac{s_4}{l_4} \cos \alpha_4 \right) + m_4 l_{146} \left( \cos \tau_2 - \frac{s_4}{l_4} \cos (\tau_2 + \alpha_4) \right) + m_5 l_1 \frac{s_5}{l_5} \cos \alpha_5 + m_6 l_1 + m_7 \frac{l_{347}}{l_4} \left( l_1 \cos \bar{\beta}_4 + l_{146} \cos (\tau_2 + \bar{\beta}_4) \right) + m_8 \frac{s_8}{l_8} \left( l_1 \cos \alpha_8 - l_1 \frac{l_{147}}{l_4} \cos (\beta_4 + \alpha_8) + l_{146} \cos (\tau_2 + \alpha_8) - \frac{l_{147}}{l_4} l_{146} \cos (\beta_4 + \alpha_8) \right) \quad (43)$$

$$m \cdot y_S = -m_4 l_1 \frac{s_4}{l_4} \sin \alpha_4 + m_4 l_{146} \left( \sin \tau_2 - \frac{s_4}{l_4} \sin (\tau_2 + \alpha_4) \right) + m_5 l_1 \frac{s_5}{l_5} \sin \alpha_5 + m_7 \frac{l_{347}}{l_4} \left( l_1 \sin \bar{\beta}_4 + l_{146} \sin (\tau_2 + \bar{\beta}_4) \right) + m_8 \frac{s_8}{l_8} \left( l_1 \sin \alpha_8 - l_1 \frac{l_{147}}{l_4} \sin (\beta_4 + \alpha_8) + l_{146} \sin (\tau_2 + \alpha_8) - \frac{l_{147}}{l_4} l_{146} \sin (\beta_4 + \alpha_8) \right) \quad (44)$$



#### 4. Zusammenfassung

Die Drehzahlsteigerung von Koppelgetrieben erhöht u. a. die Trägheitswirkungen auf das Gestell. Durch einen dynamischen Ausgleich können diese Trägheitswirkungen verringert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß bei beliebigen ebenen Koppelgetrieben mit Dreh- und Schubgelenken ein vollständiger Trägheitskraftausgleich möglich ist.

Für ein  $n$ -gliedriges ebenes Koppelgetriebe existieren  $n$  Ausgleichsbedingungen. Werden Masse  $m_k$ , Schwerpunkt Abstand  $s_k$  und Schwerpunkt Winkel  $\alpha_k$  verändert, so können  $2n - 3$  dieser Parameter frei gewählt werden. Der im Abschnitt 3 entwickelte Algorithmus kann dem Konstrukteur als Hilfsmittel beim Aufstellen der Bedingungen für den vollständigen Trägheitskraftausgleich von ebenen Koppelgetrieben dienen.

Für die aus der Wattschen und Stephenson'schen Kette ableitbaren sechsgliedrigen Koppelgetriebe sind die Ausgleichsbedingungen in Tafel 1 aufgestellt.

#### Verfasser:

Dozent Dr. Ing. Hans Dresig  
Lehrgruppenorganisator im Lehrbereich Maschinendynamik,  
Sektion Maschinen-Bauelemente  
der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt, und  
Dipl.-Ing. Siegfried Schönfeld  
Wiss. Assistent der Lehrgruppe Getriebetechnik  
an der Sektion Maschinen-Bauelemente  
der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

#### Literatur

- [1] Berkof, R. S. und Lowen, G. G.: A new method for completely force balancing simple linkages (Eine neue Methode zum vollständigen Kraftausgleich einfacher Koppelgetriebe) ASME-publication, 68-Mech-9
- [2] Biezeno-Grammel: Technische Dynamik. Band 2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1953
- [3] Dizioglu, B.: Getriebelehre. Band 3, Dynamik, Braunschweig, Friedrich Vieweg & Sohn 1966, Berlin: VEB Verlag Technik 1969
- [4] Dizioglu, B.: Analyse und Synthese der Kurbelausgleichgetriebe, VDJ-Berichte Nr. 127 (1969), S. 5-14
- [5] Dresig, H.: Programmsystem Mechanismendynamik. Vortrag der Tagung Getriebetechnik, Karl-Marx-Stadt 1970 (erscheint 1971 in der Wissenschaftlichen Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt)
- [6] Jacobi, P.: Vollständiger Trägheitskraftausgleich bei mehrgliedrigen Koppelgetrieben. Maschinenbautechnik 18 (1969), 11, S. 605-606
- [7] Jacobi, P. und Rose, W.: Ein Beitrag zur Leistungssteigerung von Koppelgetrieben. Dissertation TH Karl-Marx-Stadt 1971
- [8] Kozesnik, J.: Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag Leipzig 1965
- [9] Sherwood, A. A.: The optimum distribution of mass in the coupler of a plane fourbar-linkage. (Die optimale Masseverteilung der Koppel eines ebenen viergliedrigen Koppelgetriebes) Journal of Mechanisms 1 (1966), 3, S. 229-234
- [10] Volmer, J., u. a.: Getriebetechnik-Lehrbuch. Berlin VEB Verlag Technik 1969
- [11] Crossley, F. R. E.: Journal of Mechanisms 3 (1968) 4, Pergamon Press
- [12] Taubald, R.: Strukturanalyse ebener Koppelgetriebe. Forschungsbericht (TH Karl-Marx-Stadt) (unveröffentlicht)